Arş. Gör. Sefa ERKUŞ

Harcama Minimizasyonu

ÖRNEK: Aleyna Tilki'nin Caramel Macchiato ve Americano tüketerek 13.4544 fayda düzeyine ulaşmak istemektedir. Aleyna'nın fayda fonksiyonu aşağıdaki gibidir. Biz Machiato yerine Q_x ve Americano yerine Q_y diyelim.

$$U\ \text{Caramel Macchiato , Americano} \ = {Q_x}^{3/4}{Q_y}^{1/4}$$

Aleyna o gün kafeye gider canı Machiato ve Americano çeker. Bugün içtiklerinden 13.4544 fayda almak isteyen Aleyna Q_x X malının fiyatı 3 TL ve Y malının fiyatı 2 TL iken ne kadar az harcama yaparak bu faydaya ulaşabilir?

Önce tüketicinin harcamasını gösterelim

$$\min_{Q_x,Q_y} P_xQ_x + P_yQ_y$$

Fayda düzeyimiz 13.4544 ve fayda fonksiyonu ${Q_X}^{3/4}{Q_y}^{1/4}$ dur. Amacımız harcamayı minimize etmek olduğundan amaç fonksiyonu yerine harcamayı yazarız

$$s.t: \qquad Bütçe = {Q_x}^{3/4}{Q_y}^{1/4}$$

Amacımız harcamayı minimize etmek olduğundan. Önce Harcama fonksiyonunu yazdık. Sonra lambda parantezinde kısıtımızı koyduk

$$L = P_xQ_x + P_yQ_y + \lambda(13.4544 - {Q_x}^{3/4}{Q_y}^{1/4})$$

Q_x'e göre kısmi türev alır 0'a eşitleriz.

$$\frac{\partial L}{\partial Q_x} = Px - \lambda\frac{3}{4}{Q_x}^{-\frac{1}{4}}{Q_y}^{\frac{1}{4}} = 0 \qquad P_x = \lambda\frac{3}{4}{Q_x}^{-1/4}{Q_y}^{1/4}$$

Q_y'e göre kısmi türev alır 0'a eşitleriz.

$$\frac{\partial L}{\partial Q_y} = P_y - \lambda\frac{1}{4}{Q_x}^{\frac{3}{4}}{Q_y}^{\frac{-3}{4}} = 0 \qquad P_y = \lambda\frac{1}{4}{Q_x}^{3/4}{Q_y}^{-3/4}$$

λ'e göre kısmi türev alır 0'a eşitleriz.

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 13.4544 - {Q_x}^{3/4}{Q_y}^{1/4} = 0 \qquad 13.4544 = {Q_x}^{3/4}{Q_y}^{1/4}$$

Şimdi kısmi türevler sonucunda elimizde farklı değerler cinsinden iki adet λ değeri mevcut.

$$\lambda = \frac{4P_x}{3{Q_x}^{-\frac{1}{4}}{Q_y}^{\frac{1}{4}}} = \ ve\ \lambda = \frac{4P_y}{{Q_x}^{\frac{3}{4}}{Q_y}^{-\frac{3}{4}}}$$

Bu durumda λ'ları eşitleyebiliriz. İçler dışlar çarpımı yaparız.

$$\frac{4P_x}{3{Q_x}^{-\frac{1}{4}}{Q_y}^{\frac{1}{4}}} = \frac{4P_y}{{Q_x}^{\frac{3}{4}}{Q_y}^{-\frac{3}{4}}} = \lambda$$

$${Q_y}^{\frac{4}{4}} = \frac{1}{3}\frac{P_x}{p_y}{Q_x}^{\frac{4}{4}}$$

Şimdi elimizdeki bilinmeyen sayısını azaltmak için istersek Q_y'yi Q_x cinsinden, istersek Q_x'i Q_y cinsinden bularak bilinmeyen sayısını azaltabiliriz. Aşağıda Q_y'yi Q_x cinsinden bulduk.

$$Q_y = \frac{P_x}{3p_y}Q_x$$

Fayda kısıtında bulduğumuz Q_y değeri yerine Q_x değerini yerleştirirsek 2 bilinmeyenli denklem tek bilinmeyenli denklem olur.

$$13.4544 - {Q_x}^{3/4}\left(\frac{P_x}{3p_y}Q_x\right)^{1/4} = 0$$

$$13.4544 = {Q_x}^{3/4}Q_x^{1/4}\left(\frac{P_x}{3p_y}\right)^{1/4}$$

Fiyatları biliyoruz: X malının fiyatı 3 ve Y malının fiyatı 2 TL. Yerine koyup hesaplama yaparız.

$$13.4544 = Q_x\left(\frac{3}{3(2)}\right)^{1/4}$$

$$13.4544 = Q_x(0.5)^{1/4}$$

$$Q_x^* = \frac{13.4544}{(0.5)^{1/4}} = 16$$

Optimal Q_x* değerini bulduk o da 16 oldu. Şimdi $Q_y = \frac{P_x}{3p_y}Q_x$ değerinde Q_x yerine Q_x*=16 yazarsak optimal Q_y* değerini buluruz.

$$Q_y = \frac{P_x}{3p_y}Q_x$$

$$Q_y^* = \frac{3}{6}16 = 8$$

13.4544 faydaya ulaşabilmek için en minimum harcamasıyla 16 ve 8 birim mal tüketetir.

$$Q_x^* = 16\ ve\ Q_y^* = 8$$