Sorumlu Asistan Arş. Gör. Sefa ERKUŞ

Fayda Maksimizasyonu

Firmalar kar maksimizasyonu için çabalarken tüketiciler de faydalarını maksimize etmeye çalışmaktadır. Tüketiciler elindeki bütçelerini almak istedikleri mallar arasında bölüştürerek maksimum faydaya ulaşmayı amaçlar.

Maksimizasyon süreçleri için yeniden Max operatörünü kullanabiliriz:

Önce tüketicinin fayda fonksiyonunu gösterelim $\max\limits_{x,y} U(x,y)$

Kısıtımızı koyalım $s.t$: $Bütçe = P_x Q_X + P_y Q_y$

NOT: Kar maksimizasyonundan farklı olarak kısıtı maksimizasyon probleminde yerine yazamıyoruz. Bu yüzden Lagrange oluşturacağız.!

$$L = U(x,y) + \lambda(B - P_x Q_X - P_y Q_y)$$

Q_X'e göre kısmi türev alır 0'a eşitleriz. $\frac{\partial L}{\partial Q_X} = 0$

Q_y'e göre kısmi türev alır 0'a eşitleriz. $\frac{\partial L}{\partial Q_y} = 0$

λ'e göre kısmi türev alır 0'a eşitleriz. $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$

Elde edeceğimiz lambdaları kullanarak istediğimiz x ve y miktarlarını birbiri cinsinden buluruz. Daha sonra bütçe kısıtında kullanarak optimal x* ve y* değerlerini bulup fonksiyonda yazarak fayda maksimizasyonunu gerçekleştiririz.

$$M = P_x Q_X + P_Y Q_y$$

ÖRNEK: Aleyna Tilki'nin Caramel Macchiato ve Americano tüketimi ile ilgili fayda fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$U(\text{Caramel Macchiato}, \text{Americano}) = {Q_X}^{3/4} {Q_y}^{1/4}$$

Versace marka cüzdanında taşıdığı 64 TL ile kafeye giden Aleyna menüye bakar Caramel Macchiato'nun 3 TL ve Americano'nun 2 TL olduğunu görür? Aleyna'nın faydasını maksimize eden optimal Caramel Macchiato ve Americano miktarı nedir? Faydası ne olmaktadır? Qx= Macchiato ve Qy = Americano olsun.

Önce tüketicinin fayda fonksiyonunu gösterelim $\max\limits_{u} {Q_X}^{3/4} {Q_y}^{1/4}$

Kısıtımızı oluşturalım. Miktarları bilmiyoruz ama Px ve Py'yi biliyoruz. Yerine yazarız. $s.t$: $64 = 3Q_X + 2Q_y$

Amacımız faydayı maksimize etmek olduğundan. Önce fayda fonksiyonunu yazdık. Sonra lambda parantezinde kısıtımızı koyduk $L = {Q_X}^{3/4} {Q_y}^{1/4} + \lambda(64 - 8Q_X - 2Q_y)$

Sorumlu Asistan Arş. Gör. Sefa ERKUŞ

Q_x'e göre kısmi türev alır 0'a eşitleriz.

$$\frac{\partial L}{\partial Q_x} = \frac{3}{4} {Q_x}^{-\frac{1}{4}} {Q_y}^{\frac{1}{4}} - 3\lambda = 0 \qquad \frac{3{Q_y}^{\frac{1}{4}}}{4{Q_x}^{\frac{1}{4}}} = 3\lambda$$

Q_y'e göre kısmi türev alır 0'a eşitleriz.

$$\frac{\partial L}{\partial Q_y} = \frac{1}{4} {Q_x}^{\frac{3}{4}} {Q_y}^{\frac{-3}{4}} - 2\lambda = 0 \qquad \frac{{Q_x}^{\frac{3}{4}}}{4{Q_y}^{\frac{3}{4}}} = 2\lambda$$

λ'e göre kısmi türev alır 0'a eşitleriz.

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 64 - 3Q_x - 3Q_y = 0$$

Şimdi kısmi türevler sonucunda elimizde farklı değerler cinsinden iki adet λ değeri mevcut.

$$\lambda = \frac{3{Q_y}^{\frac{1}{4}}}{12Q_x^{\frac{1}{4}}} = \ ve \ \lambda = \frac{Q_x^{\frac{3}{4}}}{8{Q_y}^{\frac{3}{4}}}$$

Bu durumda λ'ları eşitleyebiliriz. İçler dışlar çarpımı yaparız.

$$\frac{3{Q_y}^{\frac{1}{4}}}{12Q_x^{\frac{1}{4}}} = \frac{Q_x^{\frac{3}{4}}}{8{Q_y}^{\frac{3}{4}}} = \lambda$$

$$24{Q_y}^{\frac{4}{4}} = 12Q_x^{\frac{4}{4}}$$

Şimdi elimizdeki bilinmeyen sayısını azaltmak için istersek Q_y'yi Q_x cinsinden, istersek Q_x'i Q_y cinsinden bularak bilinmeyen sayısını azaltabiliriz. Aşağıda Q_y'yi Q_x cinsinden bulduk.

$$24Q_y = 16Q_x$$

$$2Q_y = Q_x$$

Bulduğumuz Q_x değeri, $2Q_y$ değerine eşittir.

Bütçe kısıtında bulduğumuz Q_y değeri yerine Q_x değerini yerleştirirsek 2 bilinmeyenli denklem tek bilinmeyenli denklem olur.

$$64 - 3Q_x - Q_x = 0$$

$$64 = 4Q_x$$

$$Q_x = \frac{64}{4} = 16$$

Optimal $Q_x$değerini bulduk o da 6 oldu. Şimdi $Q_y = 2Q_x$ değerinde Q_x yerine Q_x*=16 yazarsak optimal Q_y* değerini buluruz.

$$2Q_y = 16$$

$$Q_y^* = 8$$

Sonuç olarak 64 TL ile Kafeye giden Aleyna 16 tane Caramel Macchiato ve 8 tane Americano içerek faydasını maksimize eder. Tabi ki faydasını maksimize etmek için cebindeki bütün parayı harcamıştır.

Toplam faydayı hesaplamak için bulduğumuz optimal değerleri fayda fonskiyonunda yerine koyarız.

$$U(\text{Caramel Macchiato}, \text{Americano}) = {Q_X}^{3/4} {Q_y}^{1/4}$$

Üretim Maksimizasyonu

Cobb-Douglas tipi üretim geçerli iken üretim miktarını maksimize etmek isteyen firma da amaç üretim faktörlerinin esnekliklerini ve maliyetlerini dikkate alarak üretimi maksimize eder. Tüketici fayda maksimizasyonuna benzer şekilde aşamalar gerçekleştirir.

SORU: Üretimde emeğin esnekliği 0.5 ve sermayenin 0.5 olduğu bir ekonomide işçiler için 2 TL, sermayenin faizi için ise 1 TL ücret ödenmektedir. Firmanın üretim bütçesi 40 iken üretimi maksimize eden optimal emek ve sermaye miktarını bulunuz.

İlk önce amaç ve kısıtlarımızı bilelim. Amacımız maksimum üretim olduğundan amacımız üretim fonksiyonu kısıtımız ise şirketimizin bütçesi olmaktadır.

Şirketin bütçesi, üretim faktörlerinin miktarı ile faktör fiyatlarının çarpımının toplamına eşittir. Şirket sermaye yani (K) için faiz (r) öder. Emek yani (L) için ücret yani (w) öder.

$$B = rK + wL$$

$$\max_{K,L} AK^{0.5}L^{0.5}$$

Önce firmanın maksimizasyon problemini yazalım

$$\max_{K,L} AK^{0.5}L^{0.5}$$

Kısıtımızı oluşturalım. Miktarları bilmiyoruz ama r ve w'yi biliyoruz. Yerine yazarız.

$$40 = K + 2L$$

Amacımız üretimi maksimize etmek olduğundan. Önce fayda fonksiyonunu yazdık. Sonra lambda parantezinde kısıtımızı koyduk

$$L = AK^{0.5}L^{0.5} + \lambda(40 - K - 2L)$$

K'e göre kısmi türev alır 0'a eşitleriz.

$$\frac{\partial L}{\partial K} = 0.5AK^{-0.5}L^{0.5} - \lambda = 0$$

L'e göre kısmi türev alır 0'a eşitleriz.

$$\frac{\partial L}{\partial L} = 0.5AK^{0.5}L^{-0.5} - 2\lambda = 0$$

λ'e göre kısmi türev alır 0'a eşitleriz.

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 40 - K - 2L = 0$$

Şimdi kısmi türevler sonucunda elimizde farklı değerler cinsinden iki adet λ değeri mevcut.

$$\lambda = 0.5AK^{-0.5}L^{0.5} \; ve \; \lambda = \frac{0.5AK^{0.5}L^{-0.5}}{2}$$

Bu durumda λ'ları eşitleyebiliriz. İçler dışlar çarpımı yaparız.

$$\frac{0.5AK^{0.5}L^{-0.5}}{2} = 0.5AK^{-0.5}L^{0.5}$$

$$0.5AK^{0.5}L^{-0.5} = AK^{-0.5}L^{0.5}$$

Bilinmeyen sayısını azaltmak için K'yı L cinsinden veya L'yi Ka cinsinden yazarız.

$$0.5K = L$$

$$K = 2L$$

Bulduğumuz değeri kısıtta yerine koyarız

$$40 - K - 2L = 0$$

$$40 - 2L - 2L = 0$$

Optimal emek değerini buluruz

$$L^* = 10$$

Sermaye ve Emek miktarı arasındaki ilişkiyi bildiğimizden optimal sermaye miktarını da buluruz.

$$K = 2(10)$$

$$K^* = 20$$

Toplam üretimi biliyorsak üretim fonksiyonunu kullanabiliriz.

$$Q = A(20)^{0.5}(10)^{0.5}$$