

Eksik bilgi altında dinamik oyunlar

Sinyalleme Oyunları

Sinyalleme oyunu (Signalling game) iki oyuncu içeren ve iki aşamalı eksik bilgili dinamik bir oyundur. Oyunda bir sinyal gönderici ve bir sinyal alıcı oyuncu bulunmaktadır. Oyunculardan sinyal gönderen, oyunun getirisini etkileyen özel bir bilgiye sahiptir. Bu özel bilgi sinyal gönderenin tercihidir.

Sinyalleme oyunun unsurları

- Oyuncular: $N = \{P_1, P_2\}$
- Tercihler/Oyuncu Tipleri: $T = \{t_1, t_2\}$
- Mesajlar: $M = \{m_1, m_2\}$
- Aksiyonlar: $A = \{a_1, a_2\}$
- Getiriler: $U_G(t_i, m_j, a_k), U_A(t_i, m_j, a_k)$

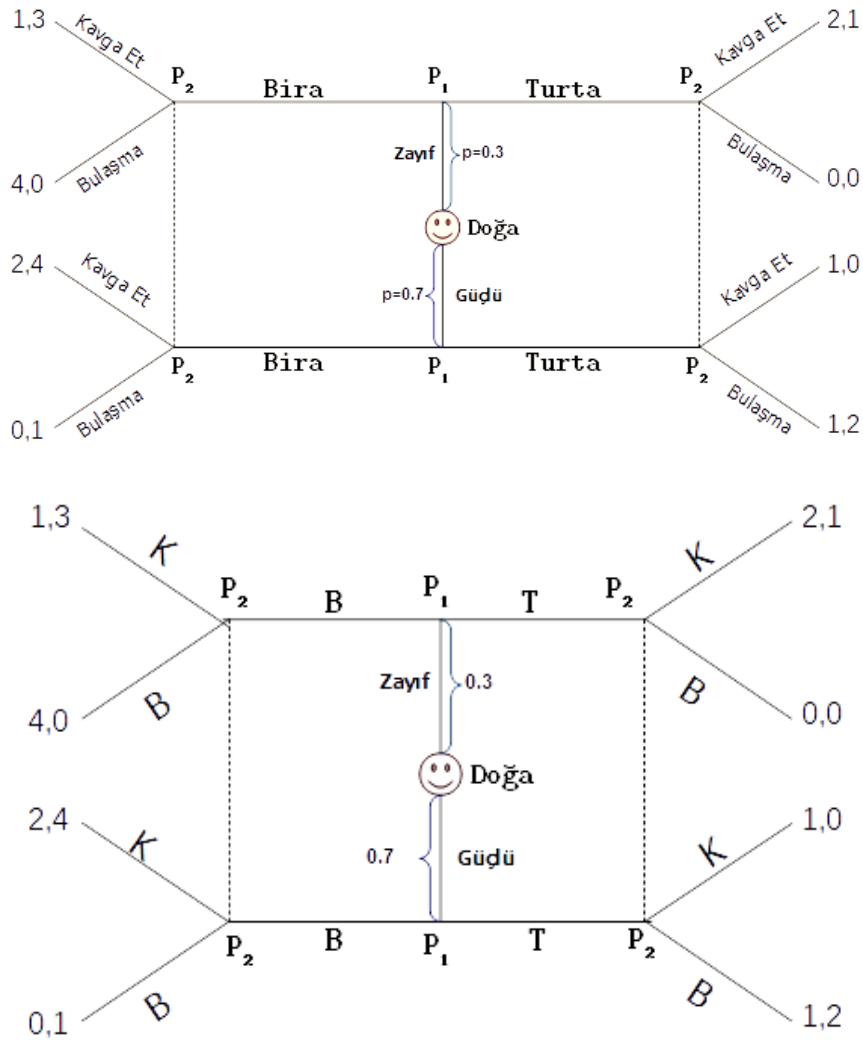
Oyunda öncelikle doğa ismini verdiğimiz oyuncu bir olasılık dağılımı ile $p(t_i)$ muhtemel bir tercih/tip kümesi içinden $T = \{t_1, t_2\}$ Oyuncu 1'in tipini tercih etmektedir. Tip/tercih kümesi sonlu elemana sahip bir kümedir. Olasılıklar toplamı ise bire eşittir. Burada oyuncu 1 sinyal gönderici olup doğanın seçtiği t_i 'yi gözlemler ve sonrasında mesaj kümesinden $M = \{m_1, m_2\}$ bir mesaj m_j seçer. Mesaj kümesinin sonlu elemana sahip bir küme olduğu varsayılır. Sonraki aşamada Oyuncu 2 yani oyunda sinyal alıcı olan oyuncu, m_j mesajı gözlemler ve ardından muhtemel sonlu elemana sahip olan aksiyon kümesi $A = \{a_1, a_2\}$ içinden bir eylem a_k seçer. Burada bilmemiz gereken sinyal alıcı olan oyuncu 2'nin sadece mesajı gözlemleyebildiği ama doğanın tercih ettiği oyuncu tipi hakkında bilgisi olmadığıdır. Alıcı, tercih/tip hakkında bilgiye sahip olmasa da ne olduğu konusunda bir inanca (belief) sahiptir. Son aşamada ise sinyal gönderici oyuncu 1'in $U_G(t_i, m_j, a_k)$ ve sinyal alıcı oyuncu 2'nin $U_A(t_i, m_j, a_k)$ getirileri hesaplanır.

- Göndericinin mesaj fonksiyonu: $m_j(t_i)$ (Oyuncu 1'in mesajının doğanın tercih ettiği tipe bağlı olduğunu gösterir)
- Alıcının aksiyon fonksiyonu: $a_k(m_j)$ (Oyuncu 2'nin aksiyonunun Oyuncu 1'in tercih ettiği mesaja bağlı olduğunu gösterir)

Sinyalleme oyununda sinyal gönderici olan Oyuncu 1'in gönderdiği mesajlar/sinyaller oyuncunun tipi hakkında bilgi verebilir ya da bilgi vermeyebilir. Sinyal gönderici her tipte farklı bir mesaj gönderiyorsa, doğanın belirlediği tip açığa çıkar. Göndericinin farklı tiplerde farklı tercihlerde bulunduğu, bu tercihlerin sinyal alıcıya mesajlar gönderdiği bu tercihlere ayırıcı denge (seperating equilibrium) adı verilir. Bu durum sinyal göndericinin mesajını gözlemlemenin (m_j), oyuncunun tipini (t_i) gözlemlemekle aynı olduğu duruma işaret etmektedir. Sinyal gönderici doğanın tercih ettiği her iki tipte de aynı mesajı (m_j) gönderiyorsa, sinyal alıcı olan Oyuncu 2, sinyal göndericinin tipi hakkında tam bilgiye ulaşamaz. Bu durum da sinyal göndericinin sahip olduğu özel bir bilgi iken, sinyal alıcı için eksik bilgi demektir. Sinyal göndericinin her iki tipte de aynı mesajı gönderdiği bu tercihlere toplayıcı denge (pooling equilibrium) denmektedir.

Bira ve Turta Oyunu (Beer and Quiche Game)

Sinyalleme oyunları eksik bilgili dinamik oyunların bir türüdür. Örnekteki Sinyalleme oyununda 2 adet oyuncu vardır $N=\{P_1, P_2\}$. Bu oyunculardan P_1 sinyal gönderici ve P_2 sinyal alıcıdır. Oyunda ilk önce doğa (Nature) sinyal göndericinin tipini $T=\{\text{Zayıf, Güçlü}\}$ olasılıklar çerçevesinde $p\{t_i\}$ belirlemektedir. Bu oyunumuzda iki tip bulunmaktadır. Gönderici kendi tipini bilmekte ve ona göre alıcıya mesaj yollamaktadır $m=\{\text{Bira, Turta}\}$

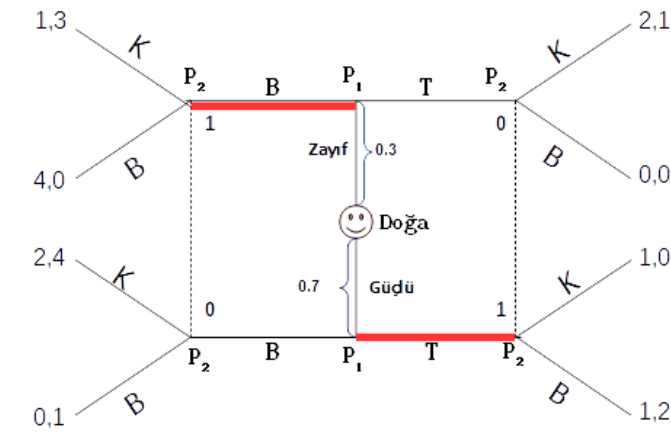


Ayrıştırıcı Dengeler

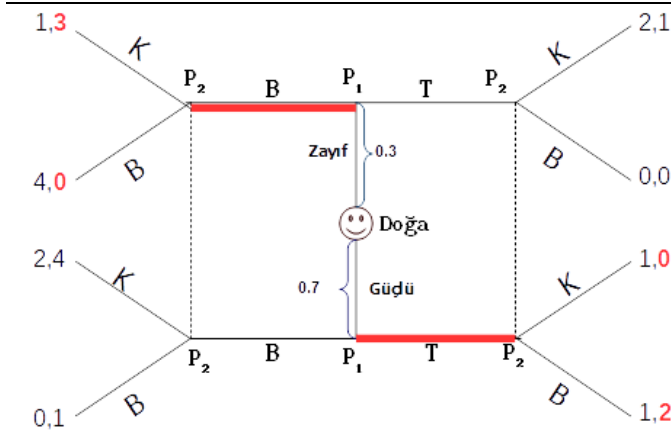
İlk önce ayrıştırıcı dengeler göz önüne alınarak çözümlenebilir. Ayrıştırıcı dengeler öncelikle doğanın farklı tercihlerinin sonucu olarak

Gönderici $\begin{cases} \text{Doğa zayıf seçerse bira iste, doğa güçlü seçerse turta iste} \\ \text{Doğa zayıf seçerse turta iste, doğa güçlü seçerse bira iste} \end{cases}$

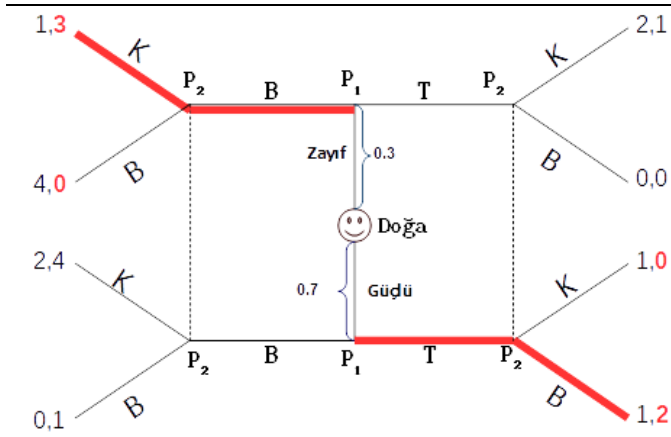
Alıcı $\begin{cases} \text{Gönderici bira isterse kavga et, turta isterse bulaşma} \\ \text{Gönderici bira isterse bulaşma, turta isterse kavga et} \end{cases}$



İlk durumda doğanın zayıf tipi seçtiği durumda gönderici bira sipariş ederek, doğa güçlü tipi seçtiği durumda turta sipariş ederek bir mesaj oluşturmaktadır. Ayrıştırıcı dengede sinyal alıcı bira mesajını aldığı durumda sol üst karar kavşağında olduğunu bilir. Bu yüzden olasılık 1'dir. Oyuncu 2 bu durumda getirisini bulunduğu nokta üzerinde hesaplar ve ona göre aksiyonda bulunur.

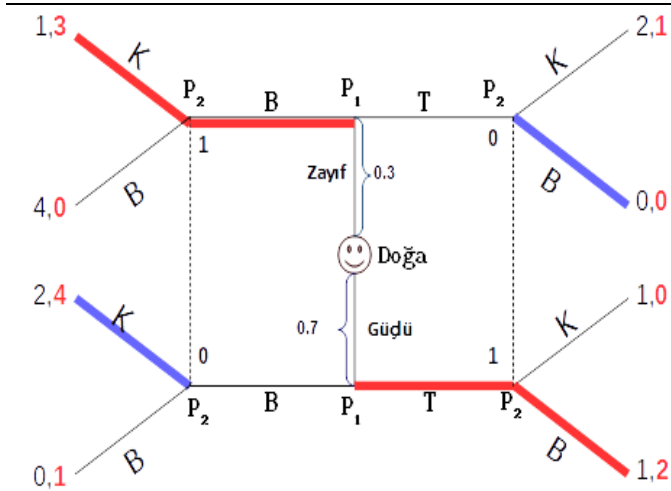


Oyuncu 2 yani P_2 , getirisini maksimize edecek şekilde aksiyonda bulunur. Göndericinin bira tercihini dikkate alır Kavga etmenin getirisinin 3, bulaşmamanın getirisinin 0 olduğunu görür. Kavga etmek daha optimaldir. Doğa güçlü tipi seçerse Oyuncu 1 turta mesajını yollar. Oyuncu 2, göndericinin turta mesajını dikkate alır. Kavga etmenin getirisinin 0, bulaşmamanın getirisinin 2 olduğunu görür. Kavga etmek daha yüksek getiri sağladığından kavga etmek ister.

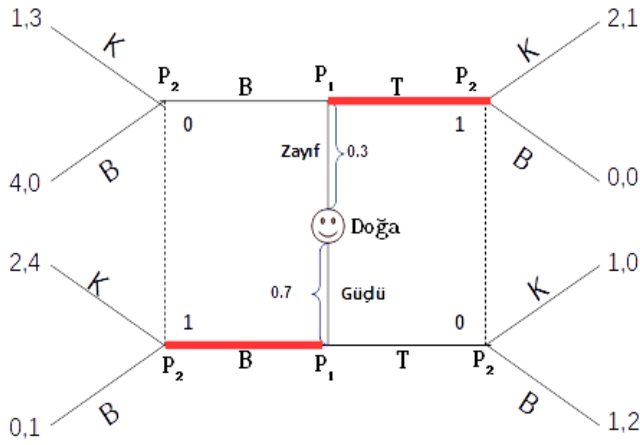


Kırmızı çizgiler ile gösterilen hareketler oyuncuların davranışlarını göstermektedir. Bu durumda Oyuncu 1'in getirileri ise, Oyuncu 2'nin aksiyonlarına bağlı olarak bira seçmesi durumunda 1, turta seçmesi durumunda da 1 olmaktadır.

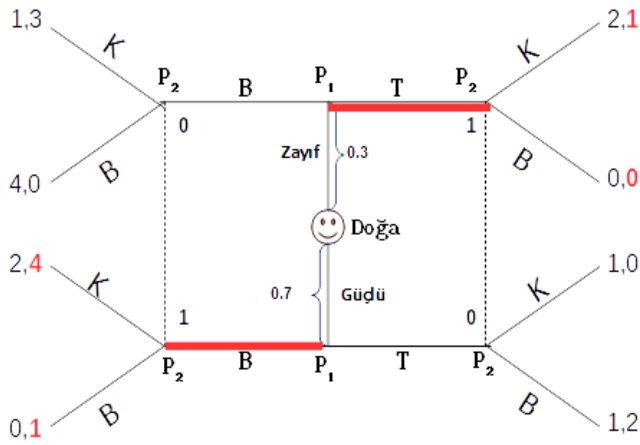
Peki doğanın tercihinden sonra Oyuncu 1 farklı mesajlar yollasaydı getirisi ne olurdu?



Oyuncu 1, doğa zayıf tipi seçtiğinde turta isteseydi, Oyuncu 2 bulaşmamayı seçseydi Oyuncu 1'in faydası 0 olacaktı. Oyuncu 1, doğa güçlü tipi seçtiğinde bira isteseydi ve bu mesajı yollasaydı, Oyuncu 2 de kavga etmemeyi seçseydi Oyuncu 1'in faydası artacak ve 2 olacaktı. Ayrıştırıcı dengede Oyuncu 1'in faydası yükseldiğinden Oyuncu 1'in varolan dengeden sapsması için bir teşvik oluşur. Bu yüzden burada denge bulunmamaktadır.

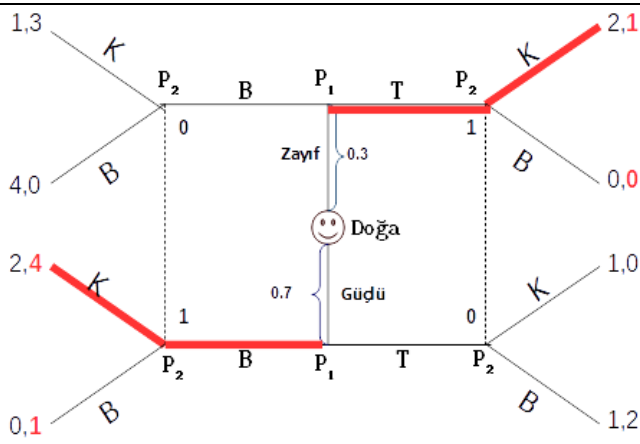


İlk durumda doğanın zayıf tipi seçtiği durumda gönderici turta sipariş ederek, doğa güçlü tipi seçtiği durumda bira sipariş ederek bir mesaj oluşturmaktadır. Ayrıştırıcı dengede sinyal alıcı bira mesajını aldığı durumda kesinlikle sol alt karar kavşağında olduğunu bilir. Bu yüzden olasılık 1'dir. Oyuncu 2 bu durumda getirisini bulunduğu nokta üzerinde hesaplar ve ona göre aksiyonda bulunur.



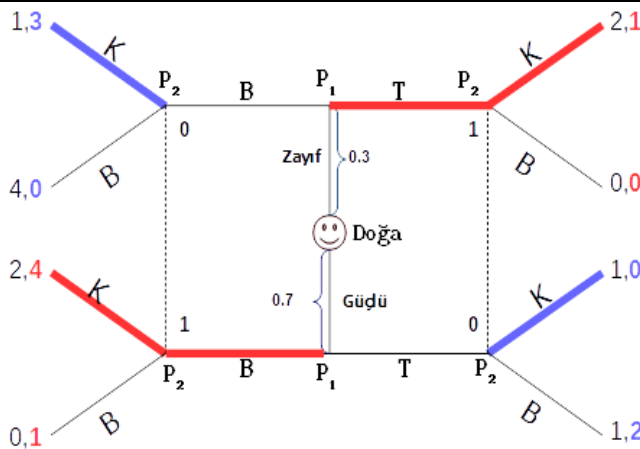
Oyuncu 2 yani P₂, getirisini maksimize edecek şekilde aksiyonda bulunur. Göndericinin bira tercihini dikkate alır Kavga etmenin getirisinin 4, bulaşmamanın getirisinin 1 olduğunu görür. Kavga etmek daha optimaldir.

Oyuncu 2, göndericinin turta mesajını dikkate alır. Kavga etmenin getirisinin 1, bulaşmamanın getirisinin 0 olduğunu görür. Kavga etmek daha optimaldir.



Kırmızı çizgiler ile gösterilen hareketler oyuncuların davranışlarını göstermektedir. Bu durumda Oyuncu 1'in getirileri ise, bira seçmesi durumunda 2, turta seçmesi durumunda ise 2 olmaktadır.

Peki doğanın tercihinden sonra Oyuncu 1 farklı mesajlar yollasaydı getirisi ne olurdu?



Oyuncu 1, doğa zayıf tipi seçtiğinde bira isteseydi, Oyuncu 2 kavga etmeyi seçseydi Oyuncu 1'in faydası düşecek ve 1 olacaktı. Oyuncu 1, doğa güçlü tipi seçtiğinde turta isteseydi ve bu mesajı yollasaydı, Oyuncu 2 de kavga etmeyi seçseydi Oyuncu 1'in faydası düşecek ve 1 olacaktı. Ayrıştırıcı dengede Oyuncu 1'in faydası düştüğünde Oyuncu 1'in varolan dengeden sapsması için bir teşvik olmamaktadır. Bu yüzden burada bir Mükemmel Bayesian Denge bulunmaktadır.

$$PBE = \{(Turta, Bira), (Kavga etmek, kavga etmek), p = 1, p = 0\}$$

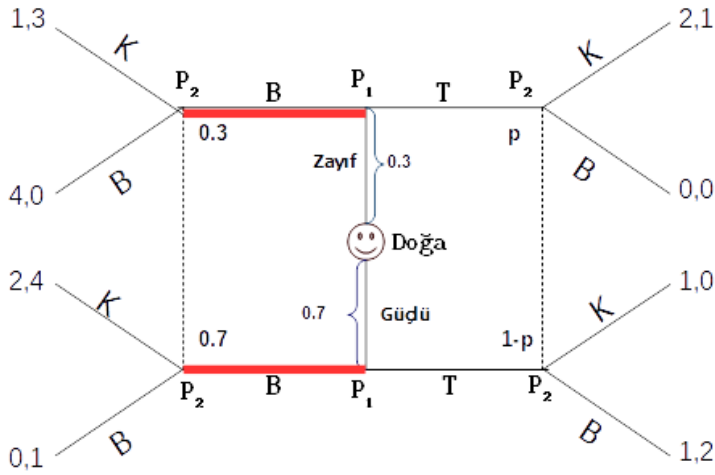
Toplayıcı Dengeler (Pooling Equilibrium)

İlk önce ayrıştırıcı dengeler göz önüne alınarak çözümlenebilir. Ayrıştırıcı dengeler öncelikle doğanın farklı tercihlerinin sonucu olarak

Gönderici $\left\{ \begin{array}{l} \text{Doğa zayıf seçerse bira iste, doğa güçlü seçerse bira iste} \\ \text{Doğa zayıf seçerse turta iste, doğa güçlü seçerse turta iste} \end{array} \right.$

Alıcı $\left\{ \begin{array}{l} \text{Gönderici bira isterse kavga et, turta isterse kavga et} \\ \text{Gönderici bira isterse bulaşma, turta isterse bulaşma} \end{array} \right.$

Birada toplayıcı denge {B, B}

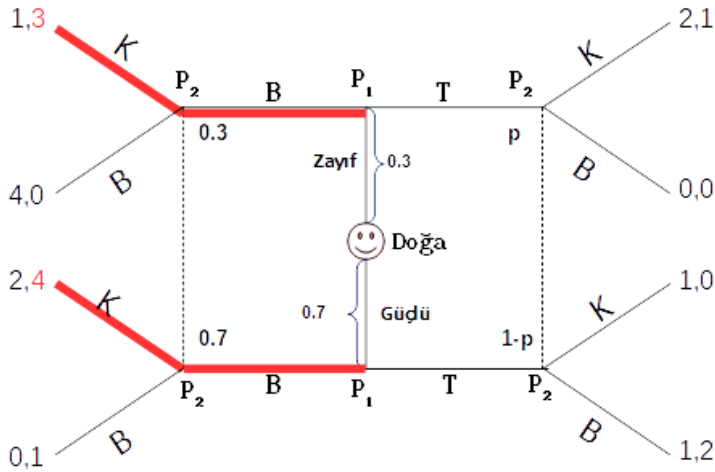


Sinyal gönderici olan Oyuncu 1'in iki tipte de bira mesajı gönderdiğini varsayalım. Bu mesajı alan Oyuncu 2 bilgi seti yüzünden oyun ağacının neresinde olduğunu bilememektedir. Oyuncu 2, doğanın tercihi konusunda da eksik bilgiye sahiptir ama olasılıklara bağlı olarak inancı vardır. Bu inançlar doğrultusunda da faydasını maksimize edecek aksiyonda bulunacaktır. Mikro iktisat dersinden hatırlayacağımız üzere eğer bir belirsizlik var ise, gerçek getiri yerine olasılıklar dahilinde bir getiriden söz edebiliriz. Eğer kavga etmenin beklenen getirisi, bulaşmamaktan yüksek ise, oyuncu kavga etmeyecektir.

$$(Kavga Etmek) = 0.3 \times 3 + 0.7 \times 4 = 3.7,$$

$$EU(\text{Bulaşmamak}) = 0.3 \times 0 + 0.7 \times 1 = 0.7$$

$$EU(\text{Kavga Etmek}) > EU(\text{Bulaşmamak})$$



Oyuncu 2'nin kavga etmekten beklediği getiri, bulaşmamaktan beklediği getiriden yüksektir. O zaman Oyuncu 1'in bira mesajını alan Oyuncu 2 için optimal tercih her zaman kavga etmektir. Bu durumda Oyuncu 1'in getirisi eğer doğa zayıf tipi seçerse 1, doğa güçlü tipi seçerse 2 olmaktadır.

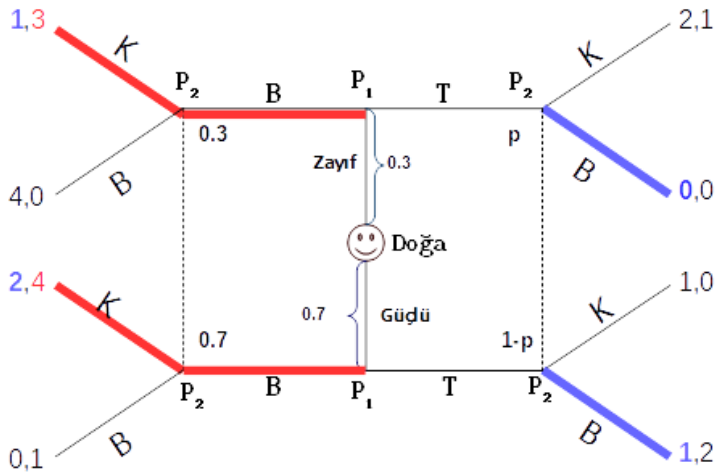
Peki doğanın tip tercihine rağmen, Oyuncu 1'in farklı bir mesaj yollaması faydasını etkiler mi? Burada Oyuncu 1'in turta seçmesi durumunda Oyuncu 2'nin beklenen getirisini hesaplarız.

$$Eu(\text{Kavga Etmek}) = p(1) + (1 - p)(0) = p$$

$$Eu(\text{Bulaşmamak}) = p(0) + (1 - p)(2) = 2 - 2p$$

$p > 2 - 2p$ ise, kavga etmek, $p < 2 - 2p$ ise bulaşmamak optimaldir.

$$Eu(\text{Kavga Etmek}) < Eu(\text{Bulaşmamak})$$



Oyuncu 2 için Oyuncu 1 turta mesajını seçerse bulaşmamak optimal getiri sağlamaktadır. Bu durumda Oyuncu 1'in getirisi ise, doğa zayıf tipi tercih ederse 0, doğa güçlü tipi tercih ederse, 1 olmaktadır.

Oyuncu 1'in zayıf ve güçlü durumdaki faydaları aşağıdaki gibi iken,

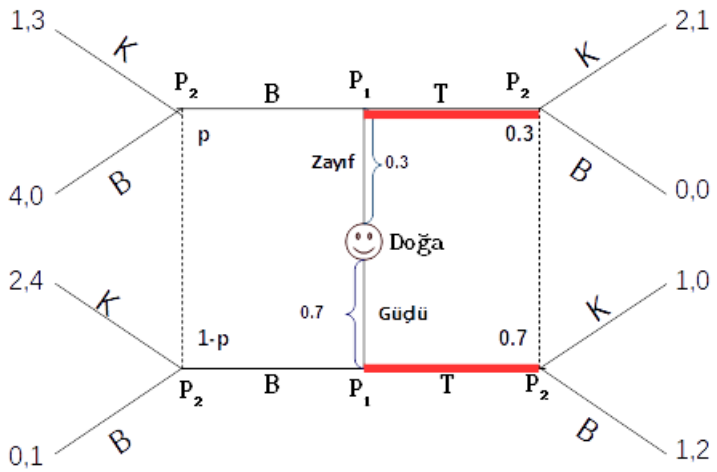
$$\pi_{zayıf}(B, K) = 1 > \pi_{zayıf}(T, B) = 0$$

$$\pi_{güçlü}(B, K) = 2 > \pi_{güçlü}(T, B) = 1$$

Oyuncu 1, mesajından sapmak istemeyecektir. Burada bir Mükemmel Bayesian Denge bulunmaktadır.

$$PBE = \left\{ (Bira, Bira), (Kavga etmek, kavga etmek), p = 0.3, p < \frac{2}{3} \right\}$$

Turtada toplayıcı denge {T, T}

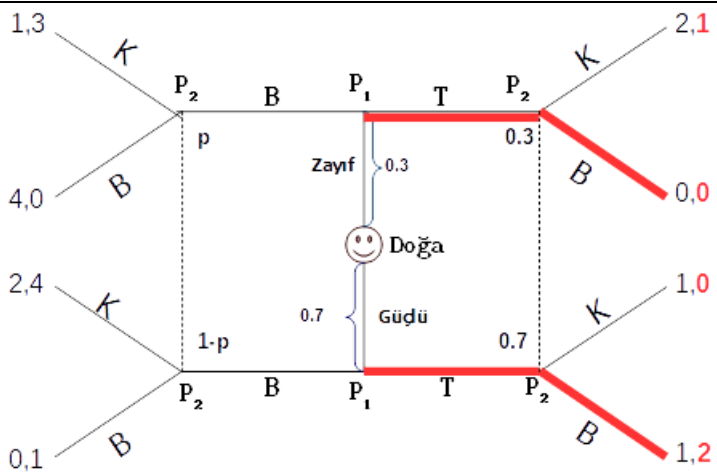


Sinyal gönderici olan Oyuncu 1'in iki tipte de turta mesajı gönderdiğini varsayalım. Bu mesajı alan Oyuncu 2 bilgi seti yüzünden oyun ağacının neresinde olduğunu bilememektedir. Oyuncu 2, doğanın tercihi konusunda da eksik bilgiye sahiptir ama olasılıklara bağlı olarak inancı vardır. Bu inançlar doğrultusunda da faydasını maksimize edecek aksiyonda bulunacaktır. Eğer kavga etmenin beklenen getirisi, bulaşmamaktan yüksek ise, oyuncu kavga etmeyecektir.

$$Eu(Kavga Etmek) = 0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$$

$$EU(Bulaşmamak) = 0.3 \times 0 + 0.7 \times 2 = 1.4$$

$$EU(Kavga Etmek) < EU(Bulaşmamak)$$



Oyuncu 2'nin kavga etmekten beklediği getiri, bulaşmamaktan beklediği getiriden düşüktür. O zaman Oyuncu 1'in bira mesajını alan Oyuncu 2 için optimal tercih her zaman bulaşmamak olacaktır. Bu durumda Oyuncu 1'in getirisi eğer doğa zayıf tipi seçerse 0, doğa güçlü tipi seçerse 1 olmaktadır.

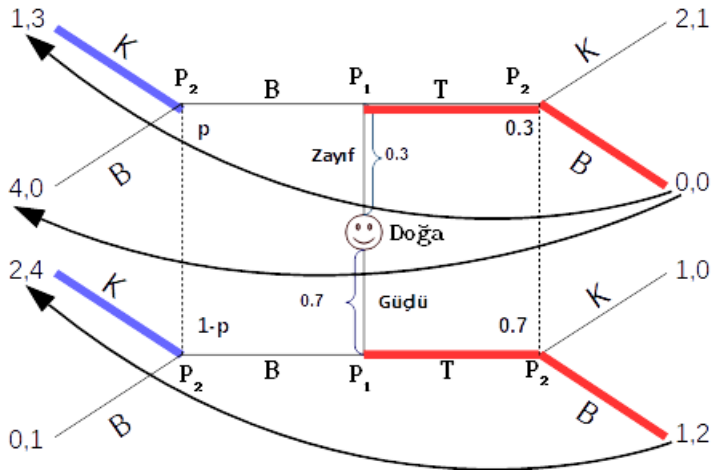
Peki doğanın tip tercihine rağmen, Oyuncu 1'in farklı bir mesaj yollaması faydasını etkiler mi? Burada Oyuncu 1'in bira seçmesi durumunda Oyuncu 2'nin beklenen getirisini hesaplarız.

$$Eu(Kavga Etmek) = p(3) + (1-p)(4) = 4-p$$

$$Eu(Bulaşmamak) = p(0) + (1-p)(1) = 1-p$$

$4-p > 1-p$ olduğundan kavga etmek daha yüksek fayda sağlar.

$$Eu(Kavga Etmek) > Eu(Bulaşmamak)$$



Oyuncu 2 için Oyuncu 1 turta mesajını seçerse kavga etmek daha yüksek getiri sağlamaktadır. Bu durumda Oyuncu 1'in getirisi ise, doğa zayıf tipi tercih ederse 1, doğa güçlü tipi tercih ederse, 2 olmaktadır.

Oyuncu 1'in zayıf ve güçlü durumdaki faydaları aşağıdaki gibi iken,

$$\pi_{zayıf}(T, B) = 0 < \pi_{zayıf}(B, K) = 1$$

$$\pi_{güçlü}(T, B) = 1 < \pi_{güçlü}(B, K) = 2$$

Oyuncu 1, daha yüksek fayda getirdiği için mesajından sapmak istemeyecektir. Burada Mükemmel Bayesian Denge bulunmamaktadır.